Εξέταση Σεπτέμβριος 2021 - Εισαγωγή στην Τοπολογία (Α. Τόλιας)

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Ενδέχεται να υπάρχουν περισσότερες από μία επιλογές.

Ερώτηση 1. Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος και $f, g \colon X \to X$ συνεχείς συναρτήσεις. Τότε:

(i) για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X και κάθε $x \in X$ αν $x_n \xrightarrow{\rho} x$,τότε $f(g(x_n)) \xrightarrow{\rho} f(g(x))$

(ii) για κάθε $x \in X$ και $\epsilon > 0$ το σύνολο $f^{-1}(B_\rho(x, \epsilon))$ είναι ανοικτό σύνολο του X.

(iii) για κάθε $x \in X$ και $\epsilon > 0$ το σύνολο $f^(B_\rho(x, \epsilon))$ είναι ανοικτό σύνολο του X.

(iv) Αν K είναι συμπαγές υποσύνολο του X, τότε το $f^{-1}(K)$ είναι συμπαγές.

(v) Αν K είναι συνεκτικό υποσύνολο του X, τότε το $g(K)$ είναι συνεκτικό.

Ερώτηση 2. Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος.

(i) Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία στο X, τότε το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι συμπαγές.

(ii) Αν $\epsilon > 0$ και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στο X ώστε $\rho(x_n, x_m) > \epsilon$, για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ με $n \neq m$, τότε το $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι συμπαγές.

(iii) Αν K είναι συμπαγές και A ανοικτό (ως προς την σχετική μετρική στο K) υποσύνολο του K, τότε το $K \setminus A$ είναι συμπαγές.

(iv) Αν K και L είναι συμπαγή υποσύνολα του X, τότε το $K \cup L$ είναι συμπαγές.

(v) Αν $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων του X, τότε το σύνολο $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ είναι συμπαγές.

Ερώτηση 3. Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^2$ εφοδιασμένο με την Ευκλείδεια μιετρική. Ορίζουμε τα σύνολα:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y,\ x \in [-5, 5]\}$$

και το συμπλήρωμα αυτού, δηλαδή το σύνολο $B = \mathbb{R}^2 \setminus A$.

(i) Το σημείο $(1, \sqrt{3})$ είναι εσωτερικό σημείο του A.

(ii) Το σημείο $(4, 4)$ είναι σημείο επαφής του A.

(iii) Το σημείο $(\sqrt{3}, 1)$ είναι σημείο επαφής του B.

(iv) Το σημείο $(2, 2)$ είναι σημείο συσσώρευσης του A.

(v) Το σημείο $(2, 2)$ είναι σημείο συσσώρευσης του B.

(vi) Το A είναι συμπαγές.

Ερώτηση 4. Στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ορίζουμε τη συνήθη μετρική ρ και τη διακριτή μετρική d.

(i) Αν $x_n \xrightarrow{\rho} x$, τότε $x_n \xrightarrow{d} x$

(ii) Αν $x_n \xrightarrow{d} x$, τότε $x_n \xrightarrow{\rho} x$

(iii) Το σύνολο $(2,3]$ είναι ανοικτό στον $(\mathbb{R},\rho)$.

(iv) Το σύνολο $(2,3]$ είναι ανοικτό στον $(\mathbb{R},d)$.

(v) Το σύνολο $(2,3]$ είναι συνεκτικό στον $(\mathbb{R},\rho)$.

(vi) Το σύνολο $(2,3]$ είναι συνεκτικό στον $(\mathbb{R},d)$.

(vii) Το σύνολο $[2,3]$ είναι συμπαγές στον $(\mathbb{R},\rho)$.

(viii) Το σύνολο $[2,3]$ είναι συμπαγές στον $(\mathbb{R},d)$.

Ερώτηση 5. Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος.

(i) Αν υπάρχει ένα υποσύνολο A του X ώστε $A \neq \emptyset$, $A \neq X$ και $\bar{A} = A^o$, τότε ο X δεν είναι συνεκτικός.

(ii) Αν X μη συνεκτικός τότε υπάρχει ένα υποσύνολο A του X ώστε $A \neq \emptyset$, $A \neq X$ και $\bar{A} = A^o$

(iii) Αν K, L είναι δύο συνεκτικά υποσύνολα του X, τότε $K \cup L$ είναι συνεκτικό.

(iv) Αν K, L είναι δύο συνεκτικά υποσύνολα του X, τότε $K \cap L$ είναι συνεκτικό.

Ερώτηση 6. Στον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική θεωρουμε το σύνολο

$$A = (-\infty,-2) \cup ((-1,2] \cap \mathbb{Q}) \cup \{4\} \cup (5,8].$$

(i) Το 5 είναι σημείο επαφής του A.

(ii) Το 0 είναι εσωτερικό σημείο του A.

(iii) Το σύνολο $\bar{A}$ είναι συμπαγές.

(iv) Το 2 είναι μεμονωμένο σημείο του A.

(v) Το -2 είναι συνοριακό σημείο του A.

(vi) Το -1 είναι σημείο συσσώρευσης του A.

(vii) $A' \cap (\mathbb{R} \setminus A)' = \{-2,5,8\} \cup [-1,2]$.

Ερώτηση 7. Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος.

(i) Αν A είναι ένα υποσύνολο του X με $A \neq X$ και $\rho(x, X \setminus A) > 0$, τότε το A είναι ανοικτό.

(ii) Αν A είναι ένα υποσύνολο του X με $\emptyset \neq A \neq X$ και $\rho(A, X \setminus A) > 0$, τότε το A είναι ανοικτό και κλειστό.

(iii) Αν A είναι ένα φραγμένο υποσύνολο του X με $A \neq \emptyset$, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $x, y \in A$ με $\rho(x,y) > \mathrm{diam}(A) - \epsilon$.

(iv) Αν A είναι ένα υποσύνολο του X με $A \neq \emptyset$, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $x, y \in A$ με $\rho(x,y) - \epsilon < \mathrm{diam}(A)$.

Ερώτηση 8. Έστω $X = \{a, b, c\}$ και $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ με

$$\begin{aligned} &d(a,a) = 0, \quad &d(a,b) = 3, \quad &d(a,c) = 7, \\ &d(b,a) = 4, \quad &d(b,b) = 0, \quad &d(b,c) = 5, \\ &d(c,a) = 7, \quad &d(c,b) = 5, \quad &d(c,c) = 0. \end{aligned}$$

Ζητείται να αλλάξουν ακριβώς δύο τιμές της d (και οι υπόλοιπες επτά να μείνουν σταθερές) ώστε οι νέες τιμές να είναι επισης ακέραιες και η νέα συνάρτηση που θα προκύψει να είναι μετρική. Πόσες είναι οι λύσεις του παραπάνω προβλήματος; (Δίνονται οι επιλογές απάντησης από **μία** έως **δέκα** λύσεις).

Ερώτηση 9. Στον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική να βρείτε <u>όλα</u> τα ανοικτά υποσύνολα A του $\mathbb{R}$ των οποίων το σύνορο είναι το $\partial A = \{3, 5\}$. Πόσα σύνολα βρήκατε; (Δίνονται οι επιλογές απάντησης από **ένα** έως **δέκα** σύνολα).

Ερώτηση 10. Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος, A ένα υποσύνολο του X και $x \in X$. Αν ισχύει ότι:

"για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $y \in A$ ώστε $0 < \rho(x, y) < \varepsilon$",

ποιά από τα παρακάτω μπορούμε να συμπεράνουμε με βεβαιότητα;

(i) Το x είναι σημείο επαφής του A.

(ii) Το x είναι σημείο συσσώρευσης του A.

(iii) Το x είναι εσωτερικό σημείο του A.

(iv) Το x είναι εσωτερικό σημείο του $X \setminus A$.

(v) Το σύνολο A είναι ανοικτό.

(vi) Το σύνολο A είναι κλειστό.

(vii) Το σύνολο A δεν είναι κλειστό.